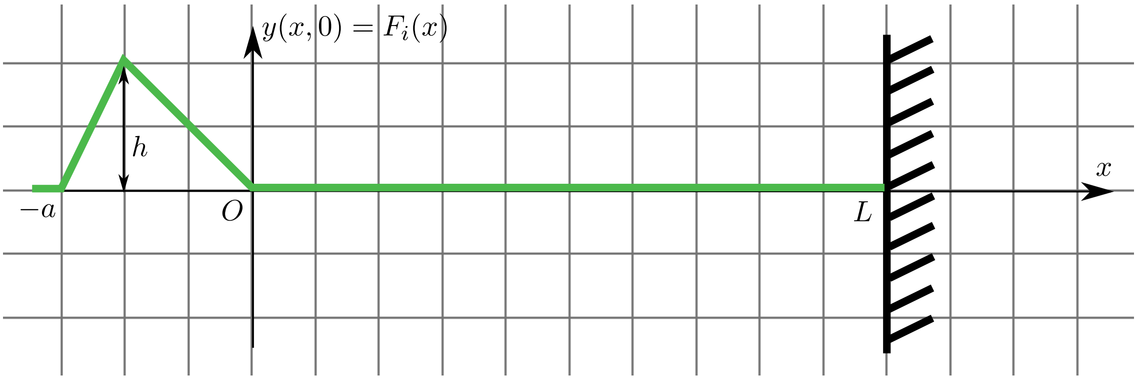
I. Propagation d'une déformation sur une corde vibrante

Une corde élastique est tendue le long de l'axe Ox et fixée à un mur à l'abscisse $x = L$. On suppose que sa position de repos correspond à l'axe Ox. On notera par la suite $y(x,t)$ l'écart de la corde à cette position de repos, à l'abscisse x et à l'instant t. Une onde progressive incidente se propage vers la droite sans déformation ni atténuation sur cette corde. La corde est tendue de telle sorte que la célérité des ondes soit c supposée connue. A l'instant de référence $t = 0$, l'allure de la corde est représentée sur la figure ci-dessous par la fonction $y(x,0) = F_i(x)$, avec

$$F_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -a \\ \frac{3h}{a}\,(x+a) & \text{si} \quad -a < x \leq -2a/3 \\ -\frac{3h}{2a}\,x & \text{si} \quad -2a/3 < x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$



Corde à l'instant $t = 0$.

1. Exprimer l'instant t_r auquel l'onde rencontre le mur.

2. Exprimer la perturbation $y(x,t)$ de la corde en fonction de F_i, x et t (et des données du problème), pour un instant $t < t_r$.

3. Sur le document annexe (à rendre avec votre copie), représenter la corde à l'instant $t_1 = \frac{L}{2c}$.

4. Exprimer le signal temporel $y(\frac{L}{2},t)$ vu par un observateur situé en $x = \frac{L}{2}$. Représenter graphiquement ce signal sur votre copie. On indiquera clairement les instants remarquables sur l'axe des temps.

5. Expliquer pourquoi il apparaît nécessairement une onde réflechie lorsque l'onde incidente arrive sur le mur.

6. Bien que cette onde réfléchie n'existe en réalité pas à la date $t = 0$, on peut imaginer qu'elle est alors derrière le mur. On peut donc aussi la décrire de façon hypothétique à l'instant $t = 0$ par la fonction $y_r(x,0) = F_r(x)$.

a) Exprimer alors l'onde réfléchie $y_r(x,t)$ à l'instant $t > t_r$ en fonction de F_r.

b) En déduire l'onde totale $y(x,t)$ formée par la superposition des ondes incidente et réfléchie, à l'aide des fonctions F_i et F_r, pour $t > t_r$.

7. Dans la suite on se place toujours à un instant $t \geq t_r$.

a) Exprimer la condition à la limite en $x = L$ vérifiée par les fonctions F_i et F_r.

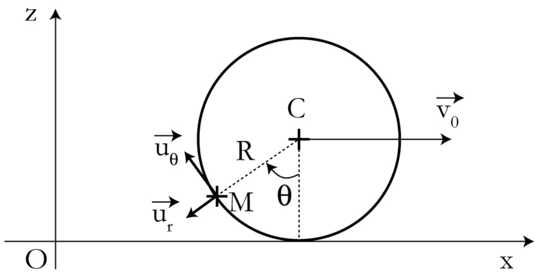
b) En déduire l'expression de l'onde réfléchie $y_r(x,t)$ puis celle de l'onde totale $y(x,t)$, uniquement en fonction de F_i.

8. **a)** En utilisant l'expression de l'onde totale $y(x,t)$ en fonction de F_i, construire sur le document annexe la forme de la corde à l'instant $t_2 = \frac{L+2a/3}{c}$. On pourra raisonner à l'aide d'opérations de symétries. On justifiera clairement.

b) Même question pour l'instant $t_3 = \frac{3L}{2c}$.

II. Mouvement d'un caillou sur un pneu

Dans le référentiel terrestre, $\mathcal{R}$, une voiture avance en mouvement rectiligne selon l'axe (Ox), à une vitesse v_0 constante. À l'instant $t = 0$ une roue passe sur un caillou M qui se trouvait au point O, et ce caillou se coince alors dans le pneu. On note C le centre de cette roue et R son rayon extérieur. On pose θ l'angle entre la verticale descendante et $[CM]$, et l'orientation choisie est rétrograde (sens positif horaire). On définit la base polaire $(C, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, avec $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ unitaires, comme indiqué ci-contre.



1. a) La roue roule sans glisser sur la route. De quelle distance dx avance alors la voiture sur le sol lorsque la roue tourne d'un angle $\mathrm{d}\theta$? En déduire $\omega = \dot{\theta}$ en fonction de v_0.

   b) Déterminer l'évolution au cours du temps de l'angle $\theta(t)$.

2. Quelles sont, en fonction de R et θ, les coordonnées cartésiennes x et z du caillou M ?

3. a) Déterminer, en fonction de R, θ et ω, la vitesse et l'accélération de M ?

   b) Donner la vitesse et l'accélération de M au moment où ce point est en contact avec l'axe Ox.

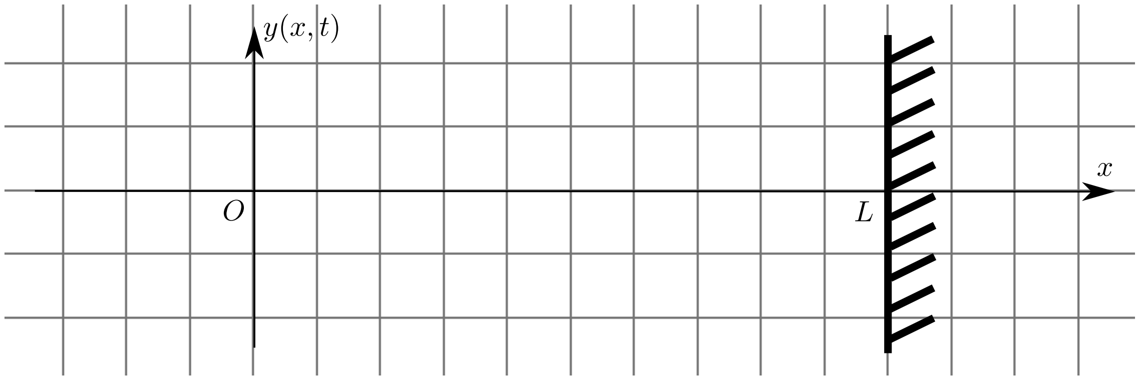
4. Tracer l'allure de la trajectoire de M dans le référentiel terrestre, en indiquant la position des points caractéristiques.

5. Après quelques tours de roue, le caillou se détache soudainement. Part-il vers l'avant ou vers l'arrière ?

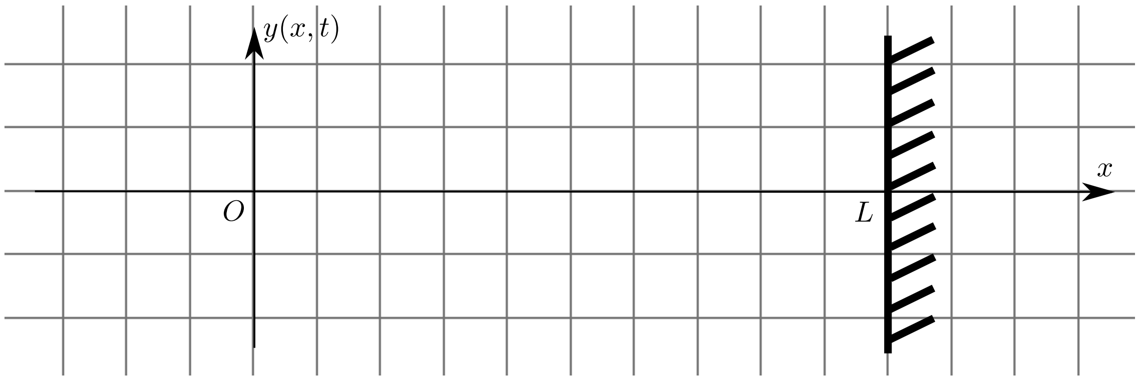
6. Quel est le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié à la voiture ?

ANNEXE (à rendre avec la copie)

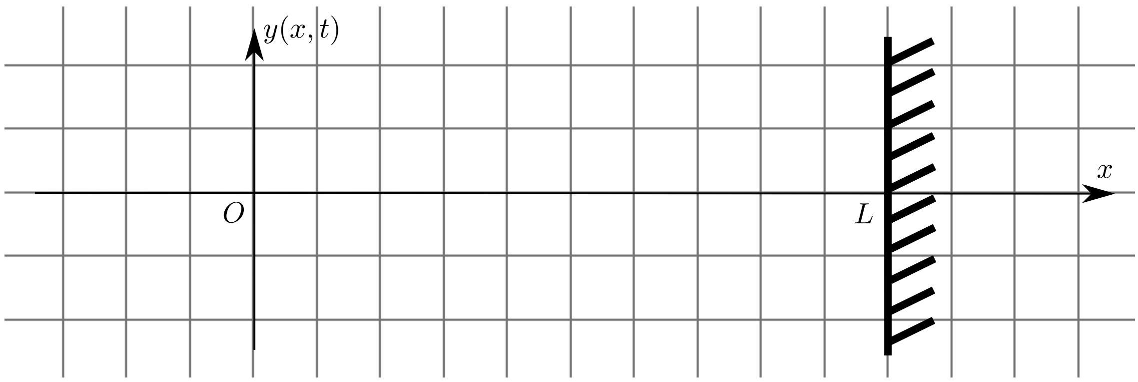
NOM : Prénom :



Corde à l'instant $t = t_1 = \frac{L}{2c}$**.**



Corde à l'instant $t = t_2 = \frac{L+2a/3}{c}$**.**



Corde à l'instant $t = t_3 = \frac{3L}{2c}$**.**